

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазинова Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

7-дәріс. Жанасатын элементтерді анықтау

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулерін құрастыру және оларды қолдануды үйрету; жанасатын элементтер теңдеулерін жуықтап интегралдау әдістерін меңгерту.

Жоспар

1. Жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулері
2. Жанасатын элементтер теңдеулерін жуықтау интегралдауы

Егер нақты қозғалыс күрделі және периодтық бұзылыстарға ұшыраса, онда әрбір мезетте сол денеге дәл сәйкес келетін жорамал эллипс салуға болады. Осы эллипс — жанасатын орбита (осциллирующая орбита) деп аталады, ал оның параметрлері — жанасатын элементтер.

Сонда ұйытқымалы орбитасы ұйытқысыз кеплер орбиталар жиынтығының айналатын қисығы ретінде болады. Ұйытқымалы қозғалыстың шешімін анықтау үшін — ұйытқысыз қозғалыстың орбита элементтерін вариация әдісі арқылы анықтауға болады. Осы әдіс, аспан механикасында, жанасатын орбиталар немесе жанасатын элементтер әдісі деп аталады.

Егер әр уақыт мезетінде ұйытқысыз қозғалыстың радиус-векторы мен жылдамдық векторыны қарастырылып отырған ұйытқымалы қозғалыстың радиус-векторы мен жылдамдық векторына сәйкес келсе, осы ұйытқысыз қозғалысты жанасатын қозғалыс деп атайды. Оның орбита элементтері - айнымалы шамалар болады және олар жанасатын элементтер деп аталады. Осы орбитаны - жанасатын орбита деп атайды.

Жанасатын элементтердің уақыт бойынша өзгеру заңдарын анықтау үшін Эйлер мен Лагранж әдістері қолданылады.

Егер қозғалысқа қосымша кішкентай бөгде күштер R, S, W әсер етсе (радиалды, тангенциалды және қалыпты бағыттар бойынша), онда Эйлер теңдеулері қолданылады. Бұл теңдеулер сипаттайды: орбитаның пішіні (a, e) қалай өзгереді; орбитаның бағыты мен орналасуы (i, Ω, ω) қалай айналады; қозғалыстың жылдамдық кезеңі мен аномалиясы (M) қалай өзгереді. Әрбір теңдеу аспан денесіне әсер ететін нақты физикалық факторға тәуелді (мысалы, басқа планетаның тартылысы, Күннің радиациялық қысымы, атмосфераның әсері және т.б.).

1. Жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулері

Осында екі дене есебіндегі Якоби элементтерінің Кеплер элементтерімен байланысын қолданамыз

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1; \quad (1)$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i, \quad \beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \quad (2)$$

Якоби элементтері ұйытқымалы қозғалыста Гамильтон функциясына тең болады: $H = H_0 - R$, осында H_0 - ұйытқысыз қозғалыстың Гамильтон функциясы, $U_1 = -R$ - ұйытқудың потенциалдық энергиясы. α_i, β_i элементтері ұйытқымалы қозғалыста каноникалық түйіндес айнымалы шамалар, сондықтан олар *каноникалық элементтер* деп аталады. Егер Якоби элементтеріне кез келген каноникалық түрлендіруді қолдансақ, жаңа каноникалық элементтер жүйесін аламыз. Аспан механикасында Делоне каноникалық элементтері, Пуанкаренің бірінші және екінші каноникалық элементтерінің жүйесі қолданылады.

α_i, β_i каноникалық айнымалы шамаларға сәйкес келетін Гамильтон теңдеулері

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}. \quad (3)$$

Ұйытқысыз қозғалыстың гамильтон функциясы H_0 - α_i, β_i элементтерінің тұрақты шамаларын береді, сондықтан

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (4)$$

Осы теңдеудегі жанасатын Якоби элементтерінен жанасатын Кеплер элементтеріне ауысу қажет. Сонда

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\beta_3}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\beta_1}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad (5)$$

$$\sin i \frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_3}{dt} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}. \quad (6)$$

Ұйытқу потенциалынан Якоби элементтері бойынша туындыларын анықтағанда

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial R}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\frac{\mu(e^2 - 1)}{2p^2} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\mu e}{p} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos i \frac{\partial R}{\partial p} - \sqrt{\mu p} \sin i \frac{\partial R}{\partial i}. \quad (9)$$

Сонда жанасатын кеплер элементтері үшін дифференциалдық теңдеулер - *Лагранж теңдеулері* анықталады

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad \frac{dp}{dt} = 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (10)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e \sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (11)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{e \sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau}. \quad (12)$$

Бұл теңдеулерді кез-келген жанасатын қозғалыс үшін қолдануға болады. Алғашқы дәуір үшін орташа бойлығы мен перицентр бойлығы

$$\varepsilon = \pi + M_0, \quad \pi = \Omega + \omega \quad (13)$$

және

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, \quad p = a(1-e^2) \quad (14)$$

теңдеулерін қолданып, эллипстік элементтер үшін теңдеулерді алуға болады. Сонда эллипстік жанасатын элементтер үшін *Лагранж теңдеулері*

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad (15)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{1}{na^2} \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad (16)$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (17)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \quad (18)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e}. \quad (19)$$

Лагранж теңдеулеріндегі оң жағында тұрған бөліктерінің структурасына көңіл бөлейік. Оң жақтағы бөліктері - жанасатын элементтері бойынша ұйытқу потенциалының дербес туындыларының сызықты функциялары болады. Осы жерде E_2 элементінің теңдеуінде E_1 элементі бойынша туындының коэффициенті – тек таңбасымен E_1 элементінің теңдеуіндегі E_2 элементі бойынша туындының коэффициентінен айырмашылығы болады.

Осы теңдеулер – квазиканоникалық қасиетке ие. Сол теңдеулерінде a, e, i элементтеріне Ω, π, ε элементтері бойынша R потенциалдың туындылары кіреді және керісінше байланыс болады. (15) теңдеулерінде осындай квазиканоникалық топтар p, e, i және Ω, ω, τ элементтері бойынша қарастырылады.

Егер *ұйытқу күші ретінде – тартылыс күші болса, онда Лагранж теңдеулері қолданылады.*

2. Жанасатын элементтер теңдеулерін жуықтау интегралдауы

Алдыңғы теңдеулері аргумент және белгісіз функция бойынша бейсызықты болады. Сондықтан, кез келген жуықтау интегралдау әдісін қолданған кезде жанасатын элементтер арқылы қозғалыс теңдеулерін қолданған тиімдірек болады (координаттар арқылы жазылған теңдеулеріне қарағанда). Негізгі жуықтау интегралдаудың аналитикалық әдістері ретінде итерация әдісі мен кіші параметр әдісі қолданылады.

Итерация әдісінде келесі жуықтау қолданылады

$$E_i^{(k)} = E_{i0} + \int_{t_0}^t \Phi_i(t, E_j^{(k-1)}(t)) dt. \quad (20)$$

$E_i^{(0)}$ бастапқы жуықтау ретінде E_{i0} бастапқы шарт қолданылады. Егер σ кіші параметрге тәуелді болса, сонда

$$\Phi_i(t, E_j, \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \Phi_i^{(k)}(t, E_j), \quad (21)$$

теңдеу арқылы келесі қатарды алуға болады

$$E_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \tilde{E}_i^{(k)}(t), \quad (22)$$

осында

$$\tilde{E}_i^{(k)}(t) = \int_{t_0}^t E_i^{(k)}(t, \tilde{E}_j^{(0)}, \dots, \tilde{E}_j^{(k-1)}) dt \quad (23)$$

$E_i^{(k)} - \tilde{E}_j^{(0)}, \dots, \tilde{E}_j^{(k-1)}$ белгілі уақыт функциялардың полиномдары. Екі жуықтау интегралдау кезінде бастапқы жуықтаулары бірдей

$$E_i^{(1)} = E_{i0} + \int_{t_0}^t \Phi_i(t, E_{j0}) dt, \quad (24)$$

ал жоғары дәрежедегі жуықтаулары әр түрлі болады.

Осы әдістер координаттар арқылы жазылған теңдеулерге де қолдануға болады. Жанасатын элементтер арқылы жазылған теңдеулердің интегралын анықтау үшін (14) формуланың итерация саны азаяды және алдыңғы теңдеулерге қарағанда дәлдігі артады.

Берілген уақыт интервалына байланысты қозғалыс теңдеуінің интегралын анықтау кезінде, $\frac{dE_i}{dt}$ туындының мәні төмен болғандықтан, интегралдау қадамын үлкен мөлшерде алуға болады. Әр орбита элементі қозғалыс туралы белгілі ақпарат береді, сондықтан, ұйытқымалы күштің ерекшеліктеріне байланысты, осы әдістер бөліп интегралдауды немесе жанасатын элементтер үшін жазылған теңдеулер жүйесін оңайлатуға мүмкіндік береді.

Бақылау сұрақтары

1. Жанасатын элементтер әдісі дегеніміз не және ол қандай мақсатта қолданылады?
2. Лагранж теңдеулерін жанасатын элементтерге қолдану кезінде қандай жеңілдетулер енгізіледі?
3. Жанасатын элементтер әдісінде орбитаның бастапқы элементтері қалай өзгереді?
4. Жанасатын элементтер теңдеулерін жуықтап интегралдау неліктен қажет?
5. Орбитаның уақыт бойынша баяу өзгерісін сипаттайтын қандай шамалар бар?

Әдебиеттер

1. Алимгазинова Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы //Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.
2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник.— Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006.— 256 с.
3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.
4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.

5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.

6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.